试卷代号:0877 **座位号**□□

国家开放大学(中央广播电视大学)2016年秋季学期"开放本科"期末考试

数学分析专题研究　试题(半开卷)

2017年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题4分,共20分)

1. 设 $f: X \to Y$,则 $\forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow f$ 是(　　).

A. 单射　　B. 满射

C. 有界函数　　D. 可微函数

2. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = b, b < 0$,则存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有(　　).

A. $\varphi(x) < \frac{b}{2}$　　B. $\varphi(x) < b$

C. $\varphi(x) > \frac{b}{2}$　　D. $\varphi(x) > b$

3. 已知 $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$,则 $\varphi(x) =$(　　).

A. $\sin x$　　B. $\cos x$

C. e^x　　D. $\ln x$

4. 已知 $x_0 \in (a,b)$ 是函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最大值点,则(　　).

A. $f'(x_0) = 0$　　B. $f''(x_0) \leqslant 0$

C. $\forall x \in (a,b)$,有 $f(x) < f(x_0)$　　D. $\forall x \in (a,b)$,有 $f(x) \leqslant f(x_0)$

5. 设 $\varphi(x)=e^{-x^3}-e^{x^3}$，则 $\varphi(x)$ 是(　　).

A. 有界函数　　　　B. 周期函数

C. 奇函数　　　　D. 偶函数

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

6. 集合 $A=\{a,b,c\}$，R 是 A 上的等价关系，且 $A/R=\{\{a,b\},\{c\}\}$，则 $R=$ ____________.

7. 设 $|z_1|=|z_2|=1$，则 $\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|=$ ____________.

8. $\int_0^{2\pi}(2x+\sin^7 x)\,dx=$ ____________.

9. 设 a_1,a_2,a_3 均为正数，则其几何平均与算术平均的不等式为____________.

10. 已知 $x^2+y^2=8$，则在点 $(2,2)$ 处 $\dfrac{dy}{dx}=$ ____________.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分，共 30 分)

11. 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{x}{2x-1}$，求 $f(x+1)$.

12. 求 a 的值，使得函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-ax$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

得　分	评卷人

四、证明题(每小题 15 分，共 30 分)

13. 函数 $f(x)$ 定义在 $[0,+\infty)$ 上且连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

14. 证明，当 $x\neq y$ 时有 $e^{\frac{1}{2}(x+y)}<\dfrac{1}{2}(e^x+e^y)$.

试卷代号:0877

国家开放大学(中央广播电视大学)2016年秋季学期"开放本科"期末考试

数学分析专题研究　试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2017年1月

一、单项选择题(每小题4分,共20分)

1.B　　2.A　　3.B　　4.D　　5.C

二、填空题(每小题4分,共20分)

6. $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$

7. 1

8. $4\pi^2$

9. $(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$

10. -1

三、计算题(每小题15分,共30分)

11. 解:已知 $f(\frac{1}{x}-1)=\frac{x}{2x-1}$,先来求 $f(x)$. 设 $t=\frac{1}{x}-1$,则 $x=\frac{1}{1+t}$　　8分

故有 $f(t)=\frac{1}{1+t}\Big/(\frac{2}{1+t}-1)=\frac{1}{1-t}$,即 $f(x)=\frac{1}{1-x}$　　12分

$f(1+x)=\frac{1}{1-(1+x)}=-\frac{1}{x}$　　15分

12. 解:已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-ax$,则 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-a$　　5分

设 $\varphi(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\varphi(x)$ 的最大值.

$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}-x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}>($

$\varphi(x)$严格单调增长，

故有 $\varphi(x)<\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$ 10 分

当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)=\varphi(x)-a<1-a\leqslant 0$. $f(x)$ 单调减少． 15 分

四、证明题(每小题 15 分，共 30 分)

13. 证明：已知 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

则对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$，存在 $X>0$，当 $x\geqslant X$ 时，$|f(x)-1|<\frac{1}{2}$，

即当 $x\geqslant X$ 时，$|f(x)|\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$； 9 分

在$[0,X]$上，因 $f(x)$在其上连续，故有界，即存在 $M_1>0$，当 $x\in[0,X]$时，$|f(x)|\leqslant M_1$.

选取 $M=M_1+\frac{3}{2}$. 则对 $\forall x\in[0,+\infty)$，有$|f(x)|\leqslant M$.

故 $f(x)$在$[0,+\infty)$上有界． 15 分

14. 证明：设 $f(x)=e^x$，则 $f''(x)=e^x>0$，即 $f(x)$ 是严格下凸函数． 8 分

由下凸函数的性质有：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

即 $e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^y$ 15 分